suites et séries

Exercice Soit q un nombre complexe de module strictement inférieur à 1. Montrez que la série

$$\theta_q(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{n(n-1)/2} z^n$$

définie une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^*$ vérifiant $z\theta_q(qz) = \theta(z)$.

Déduisez-en

— qu'il existe une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}^*$ vérifiant $\mathrm{qlog}(qz) = \mathrm{qlog}(z) + 1$

— que, pour $\ell \in \mathbf{C}^*$, il existe une fonction méromorphe (non nulle) sur $\mathbf{C}^*$ verifiant $e_\ell(qz) = \ell e_\ell(z)$.

Exercice $\star$ Soit $a \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$. On veut construire une solution de l'équation aux q-différences $f(qz) = a(z)f(z)$, $|q| < 1$.

Montrer qu'il existe un rayon $r > 0$ et une décomposition $a = a_0a_1a_\infty$ avec a_0 holomorphe sur un voisinage de $|z| \leq r$, a_∞ holomorphe sur un voisinage de $|z| \geq r$, $a_0(0) = a_\infty(\infty) = 1$ et $a_1(z) = cz^m$.

Montrer que le produit $f_0f_1f_\infty$ avec $f_0(z) = \prod_{n\geq 0} a_0(q^nz)^{-1}$, $f_\infty(z) = \prod_{n\geq 1} a_\infty(q^{-n}z)$ et $f_1(z) = \frac{1}{\theta_q(c^{1/m}z)^m}$ est une solution de l'équation sur un domaine que vous préciserez.

En utilisant l'équation fonctionnelle, montrez que cette solution est dans $\mathscr{M}(\mathbf{C}^*)$.

Exercice

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction f. En utilisant le principe de l'argument pour compter les zéros de f dans un disque, montrez que

1. si pour tout $n \geq 1$ f_n ne s'annule pas sur U, alors $f \equiv 0$ ou f ne s'annule jamais,
2. si f_n est injective pour tout $n \geq 1$, la limite f est soit constante soit injective.

Exercice[Théorème d'Osgood]

On considère une suite de fonctions holomorphes $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur un ouvert U et on suppose qu'elle converge *simplement* vers f sur U.

1. Soit $V \subset U$ un disque tel que $\bar{V} \subset U$. En utilisant le théorème de Baire, montrer qu'il existe un petit disque D contenu dans $\bar{V}$ sur lequel la suite est bornée.
2. En déduire (avec Montel) que la fonction f est holomorphe sur D.
3. Conclure des questions précédentes que f est holomorphe sur un ouvert dense de U.

Exercice $\star$

Soit U un voisinage de $0 \in \mathbf{C}$ et $f(z) = \lambda z + \ldots$ une fonction holomorphe sur U s'annulant en 0 de dérivée λ en 0, $|\lambda| > 1$. On veut montrer l'existence d'une fonction holomorphe φ sur un voisinage de 0 telle que $f\circ\varphi = \lambda\varphi$ ($\star$). On note $f^{\circ n}$ l'itérée n-ème de f et on pose $\varphi_n = \frac{f^{\circ n}}{\lambda^n}$.

1. Montrer que si la suite (φ_n) converge sur un voisinage de 0 alors la limite vérifie ($\star$).
2. Montrer que pour δ assez petit il existe C tel que $|z| \leq \delta$ implique $|f(z) - \lambda z| \leq C|z|^2$.
3. En déduire par récurrence que $|f^{\circ n}(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)^n|z|$,
4. puis que $|f^{\circ n+1}(z) - \lambda f^{\circ n}(z)| \leq C(|\lambda| + C\delta)^{2n}|z|^2$.
5. En choisissant δ assez petit montrer que la suite converge.
6. Traitez le cas $|\lambda| > 1$.